**п.7. Интегрирование иррациональных функций**

**а)** ***Интегралы вида *** где  – рациональная функция,  (), находятся с помощью подстановки , где , – наименьшее общее кратное.

**б)** ***Интегралы вида***  где  – рациональная функция,  (), находятся с помощью подстановки .

***Пример 1.*** Найти 

***Решение.***  ▲ 





. ▲

***Пример 2.*** Найти 

***Решение.***  ▲ 

Интеграл имеет вид , следовательно . Поэтому применяем подстановку . В результате имеем



, где . ▲

**в) *Интегралы от дифференциального бинома.***

*Дифференциальным биномом* называется выражение вида , где  – рациональные числа; .

Интегралы от дифференциального бинома  приводятся к интегралам от рациональных функций только в следующих трех случаях:

1. если  – целое число, то используется подстановка , где *k* – наименьшее общее кратное знаменателей дробей ;
2. если  – целое число, то применяется подстановка , где *s* –знаменатель дроби ;
3. если  – целое число, то применяется подстановка , где *s* –знаменатель дроби .

***Пример 3.*** Найти 

***Решение.***  ▲ Исходный интеграл можно переписать в виде

.

Имеем: . Так как  – целое число, то имеет место первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Применяем подстановку , так как знаменатели дробей  равны соответственно 2 и 3, следовательно . Тогда . Получаем





. ▲

***Пример 4.*** Найти 

***Решение.***  ▲ Перепишем интеграл в виде .

Имеем: .  – не целое, а  – целое число. Следовательно, имеет место второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Используем подстановку , где 3 – знаменатель дроби . Тогда . Получаем



. ▲

***Пример 5.*** Найти .

***Решение.***  ▲ Переписав исходный интеграл в виде , получим: . В данном случае:  – не целое,  – не целое, но  – целое число. Имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Полагаем . Тогда .

Переходя в подынтегральном выражении к переменной , имеем:





. ▲

**г) *Интегралы вида*** ******вычисляются с помощью следующих тригонометрических подстановок:

1) для интеграла :  или ;

2) для интеграла : ;

3) для интеграла :  или .

***Пример 6.*** Найти интеграл 

***Решение.*** ▲ Данный интеграл относится к виду 1), следовательно применяем подстановку . Тогда







. ▲

**д) *Интегралы вида*** ******, где  – рациональная функция относительно  и ******. Для их нахождения под знаком корня выделяется полный квадрат и выполняется подстановка ******. В результате исходный интеграл сводится к интегралам, рассмотренным в пункте **г)**.

***Пример 7.*** Найти .

***Решение.*** ▲ 



[получили интеграл вида 1) из пункта **г)**.Применим подстановку ]











. ▲

**e) *Интегралы вида*** ******, где  – действительные числа, находятся подстановкой ******.

***Пример 8.*** Найти .

***Решение.*** ▲ Воспользуемся подстановкой ******. Тогда ****** и



. ▲

**п.8. Интегрирование тригонометрических функций**

**а)** ***Интегралы вида*** , где  – рациональная функция аргументов , приводится к интегралам от рациональных функций новой переменной  с помощью универсальной тригонометрической подстановки ******. Тогда ******. Поэтому

.

***Пример 9.*** Найти .

***Решение.*** ▲ Полагаем ******. Тогда ******  . Следовательно,



. ▲

Подстановка ****** во многих случаях приводит к весьма громоздким вычислениям, поэтому на практике часто применяют другие, более простые, подстановки, в зависимости от вида подынтегральной функции и ее свойств. В частности, можно пользоваться следующими правилами:

1. если выполняется равенство , т.е. функция  *нечетна относительно* ******, то используется подстановка 
2. если выполняется равенство , т.е. функция  *нечетна относительно* , то используется подстановка 
3. если выполняется равенство , т.е. функция  *четна относительно*  *и* , то используется подстановка .

***Пример 10.*** Найти .

***Решение.*** ▲ Так как , то полагаем ******. Тогда ****** . Поэтому



. ▲

**б)** ***Интегралы вида*** , где . Для нахождения таких интегралов используют следующие правила:

1) если  – нечетное число, то применяется подстановка ; если  – нечетное число, то применяется подстановка ;

2) если  и  – четные числа, то подынтегральную функцию необходимо преобразовать с помощью формул, позволяющих понизить степень тригонометрических функций:  .

***Пример 11.*** Найти .

***Решение.*** ▲ 

. ▲

***Пример 12.*** Найти .

***Решение.*** ▲ 





. ▲

**в)** ***Интегралы вида*** , вычисляются с помощью формул тригонометрии:

;

;

.

***Пример 13.*** Найти .

***Решение.***  

. ▲

